ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΩΝ ΤΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΛΙΒΑΘΙΝΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

LIBATHIN@CEID.UPATRAS.GR

Επιστήμη και Τεχνολογία των Υπολογιστών Α.Μ.: 403

Πρώτη Ομάδα Ασκήσεων

© 18/12/2004

1. Να βρεθούν οι OGF για καθεμία από τις ακολουθίες:

a. $\{2^{k+1}\}k \geq 0$ **,b.** $\{k2^{k+1}\}k \geq 0$ **, c.** $\{kH_k\}k \geq 1$ **, d.** $\{k^3\}k \geq 2$

Λύση:

a. Για να βρούμε την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{2^{k+1}\}k \geq 0$ αρχίζουμε από την βασική γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ και εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς προσπαθούμε να δημιουργήσουμε την κατάλληλη συνάρτηση που θα μας δίνει την ζητούμενη ακολουθία.

Γνωρίζουμε πως η ακολουθία της Γ.Σ. $\frac{1}{1-z}$ είναι η 1,1,1,1… Για να εμφανίσουμε τον παράγοντα 2, θέτουμε $z \leftarrow 2z$, οπότε έχουμε την Γ.Σ. $\frac{1}{1-2z}$ με ακολουθία την $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ δηλαδή την ακολουθία 2^k. Για να πάρουμε την ακολουθία 2^{k+1}, πρέπει να ολισθήσουμε την 2^k μια θέση αριστερά, οπότε εφαρμόζοντας γνωστή ιδιότητα των Γ.Σ. λαβαίνουμε την Γ.Σ. $\frac{\frac{1}{1-2z} - a_0}{z}$, όπου a_0 είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας, δηλαδή το 2^0=1. Έτσι τελικά η ζητούμενη Γ.Σ. για την ακολουθία $\{2^{k+1}\}k \geq 0$, είναι η:

$$\frac{\frac{1}{1-2z} - 1}{z} = \frac{2}{1-2z}.$$

b. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{k2^{k+1}\}$, προκύπτει από την $\{2^{k+1}\}$ αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της με k. Για να το επιτύχουμε αυτό ας δούμε πιο προσεκτικά την Γ.Σ. της ακολουθίας $\{2^{k+1}\}$:

$$\frac{2}{1-2z} = 2^1 z^0 + 2^2 z^1 + 2^3 z^2 + 2^4 z^3 + \ldots$$

Παρατηρούμε πως αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη ως προς z τότε θα εμφανίσουμε τον όρο k σε κάθε μονώνυμο. Οπότε έχουμε:

$$\frac{4}{(1-2z)^2} = 1 \cdot 2^2 z^0 + 2 \cdot 2^3 z^1 + 3 \cdot 2^4 z^2 + 4 \cdot 2^5 z^3 + \ldots$$

Τώρα μένει να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με z ώστε να πάρουμε την ζητούμενη ακολουθία:

$$\frac{4z}{(1-2z)^2} = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot 2^2 z^1 + 2 \cdot 2^3 z^2 + 3 \cdot 2^4 z^3 + 4 \cdot 2^5 z^4 + \ldots$$

Επομένως η Γ.Σ. της ακολουθίας $\{k2^{k+1}\}$ είναι η $\frac{4z}{(1-2z)^2}$.

c. Για την αρμονική ακολουθία H_k, γνωρίζουμε ότι έχει για Γ.Σ. την $\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}$. Εφόσον θέλουμε να πάρουμε την $\{kH_k\} k \geq 1$, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη άσκηση, δηλαδή πρώτα θα παραγωγίσουμε και μετά θα πολλαπλασιάσουμε με z. Οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{k\geq 1} H_k z^k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-z)^2}\left(1+\ln\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k\geq 1} kH_k z^{k-1} \Rightarrow$$

$$\frac{z}{(1-z)^2}\left(1+\ln\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k\geq 1} kH_k z^{k}$$

Οπότε τελικά καταλήγουμε να έχουμε για την ακολουθία $\{kH_k\} k \geq 1$, την Γ.Σ. $\frac{z}{(1-z)^2}\left(1+\ln\frac{1}{1-z}\right)$.

d. Για την ακολουθία $\{k^3\} k \geq 2$, αρχίζουμε πάλι από την Γ.Σ. $\frac{1}{1-z}$. Προκειμένου να εμφανίσουμε τον παράγοντα k^3, θα κάνουμε τρεις διαδοχικές παραγωγίσεις και ολισθήσεις, έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{1-z} = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = z^0 + 2z^1 + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z^1 + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{z+1}{(1-z)^3} = z^0 + 2^2 z^1 + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + 5^2 z^4 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{z(z+1)}{(1-z)^3} = z^1 + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + 4^2 z^4 + 5^2 z^5 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{z^2+4z+1}{(1-z)^3} = z^0 + 2^3 z^1 + 3^3 z^2 + 4^3 z^3 + 5^3 z^4 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^3} = 0^3 z^0 + 1^3 z^1 + 2^3 z^2 + 3^3 z^3 + 4^3 z^4 + 5^3 z^5 + \ldots$$

Οπότε καταλήγουμε ότι η Γ.Σ. της ακολουθίας k^3 είναι η $\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^3}$. Εφόσον όμως μας ζητείται η ακολουθία για $k \geq 2$, πρέπει να αφαιρέσουμε τους δύο πρώτους όρους, άρα έχουμε:

$\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^3} - z = 2^3 z^2 + 3^3 z^3 + 4^3 z^4 + 5^3 z^5 + \dots$. Οπότε η τελική απάντηση στην ερώτηση είναι η Γ.Σ. $\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^3} - z$.

2. Να βρεθεί η OGF για την ακολουθία:

$\{H_k / k\} k \geq 1$

Λύση:

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η σχέση $\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{k\geq 1} H_k z^k$, μπορούμε να καταλήξουμε στην ζητούμενη ακολουθία κάνοντας πρώτα μια αριστερή ολίσθηση και κατόπιν ολοκληρώνοντας:

$\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{k\geq 1} H_k z^k \Rightarrow$ (διαιρούμε με z, εφόσον αρχίζουμε από k=1 δεν ασχολούμαστε με τον πρώτο όρο)

$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{k\geq 1} H_{k+1} z^k \Rightarrow$$

$$\int_0^z \frac{1}{z}\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}\,dz = \sum_{k\geq 1}\frac{H_k}{k} z^k$$

Οπότε καταλήγουμε ότι η Γ.Σ. της ακολουθίας $\{H_k / k\} k \geq 1$ είναι η $\int_0^z \frac{1}{z}\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}\,dz$.

3. Να δειχθεί ότι:

$$N![z^N]e^z \int_0^z \frac{1-e^{-t}}{t}dt = H_N$$

Υπόδειξη: Δημιουργήστε μια συνήθη διαφορικη εξίσωση πρώτης τάξης για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $H(z) = \sum_{N\geq 0} H_N \frac{z^N}{N!}$.

Λύση:

Αυτό που ζητείται στην άσκηση είναι να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $e^z \int_0^z \frac{1-e^{-t}}{t}dt$, αποτελεί την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για την αρμονική ακολουθία.

Ακολουθώντας την υπόδειξη που μας δίνει η άσκηση αρχίζουμε παραγωγίζοντας την $H(z) = \sum_{N \geq 0} H_N \frac{z^N}{N!}$, οπότε έχουμε:

$$\frac{dH(z)}{dz} = \sum_{N \geq 1} H_N N \frac{z^{N-1}}{N!} = \sum_{N \geq 1} H_N \frac{z^{N-1}}{(N-1)!}$$

Επίσης για την αρμονική ακολουθία γνωρίζουμε ότι ισχύει η αναδρομική σχέση $H_N = \frac{1}{N} + H_{N-1}$.

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{dH(z)}{dz} = \sum_{N \geq 1} \left(\frac{1}{N} + H_{N-1}\right) \frac{z^{N-1}}{(N-1)!} = \sum_{N \geq 1} H_{N-1} \frac{z^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{1}{z} \sum_{N \geq 1} \frac{z^N}{N!} \Rightarrow$$

$$\frac{dH(z)}{dz} = \mathrm{H(z)} + \frac{1}{z}(e^z - 1) \qquad (1)$$

Έτσι καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση (1), από την λύση της οποίας θα προκύψει η μορφή της H(z). Θα λύσουμε την διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, έτσι αρχικά θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της (1):

$$\frac{dH(z)}{dz} - \mathrm{H(z)} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(H(z)e^{-z}\right)' = 0 \Rightarrow \mathrm{H(z)} = \mathrm{C}e^{z} \qquad (2)$$

Θέτουμε $C \leftarrow C(z)$, και υπολογίζουμε την $\frac{dH(z)}{dz}$ για να την αντικαταστήσουμε στην (1).

$$(2) \Rightarrow \frac{dH(z)}{dz} = C'(z)e^z + C(z)e^z = \left(C'(z) + C(z)\right)e^z$$

$$(1) \Rightarrow \left(C'(z) + C(z)\right)e^z = C(z)e^z + \frac{1}{z}(e^z - 1) \Rightarrow$$

$$C'(z) = \frac{1}{z} e^{-z}(e^z - 1) = \frac{1}{z}(1 - e^{-z}) \Rightarrow$$

$$\mathrm{C(z)} = \int_0^z \frac{1}{t}(1 - e^{-t})\,dt \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (3) στην (2) και έχουμε:

$\mathrm{H(z)} = e^{z} \int_0^z \frac{1}{t}(1 - e^{-t})\,dt$ που είναι και η ζητούμενη σχέση. Οπότε αποδείξαμε το ζητούμενο.

4. Να λυθεί η αναδρομική σχέση:

$a_n = 2a_{n-2} - a_{n-4}$ **για n>4 με a0= a1=0 και a2= a3=1.**

Λύση:

Για να λύσουμε την αναδρομική σχέση εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.3, οπότε έχουμε:

$g(z) = 1 - 2z^2 + z^4 = (1-z)^2(1+z)^2 \quad (1)$

$f(z) = (z^2 + z^3)(1 - 2z^2 + z^4)(\operatorname{mod} z^4) \Rightarrow$

$f(z) = z^2 + z^3 = z^2(1+z) \qquad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow a(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{z^2(1+z)}{(1-z)^2(1+z)^2} = \frac{z^2}{(1-z)^2(1+z)} = z\frac{z}{(1-z)^2(1+z)} \quad (3)$$

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε το κλάσμα $\dfrac{z}{(1+z)(1-z)^2}$ σε απλά κλάσματα της μορφής:

$$\frac{z}{(1+z)(1-z)^2} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{(1-z)} \quad (4)$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι A=-1/4, B=1/2, C=-1/4, οπότε έχουμε ότι:

$$(3),(4) \Rightarrow a(z) = \frac{-1}{4}\frac{z}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{-1}{4}\frac{z}{1-z} \qquad (5)$$

Από την Γ.Σ. της σχέσης (5) μπορούμε να εξάγουμε τις αντίστοιχες ακολουθίες. Θα αναλύσουμε τη σχέση (5) ανά όρο, κάνοντας χρήση των πινάκων 3.1 και 3.2 του βιβλίου:

Ο όρος $\dfrac{-1}{4}\dfrac{z}{1+z} = \dfrac{-1}{4}\dfrac{z}{1-(-1)z}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $\dfrac{-1}{4}(-1)^N$ μετατοπισμένη κατά μια θέση δεξιά δηλαδή: $0, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

Ο όρος $\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{(1-z)^2}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $\dfrac{1}{2}N$.

Ο όρος $\dfrac{-1}{4}\dfrac{z}{1-z}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $\dfrac{-1}{4}$ μετατοπισμένη κατά μια θέση δεξιά, δηλαδή: $0, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{4}, \ldots$

Αν συνοψίσουμε τώρα όλες τις επιμέρους ακολουθίες καταλήγουμε στην ακόλουθη τελική ακολουθία:

$$a_N = \begin{cases} 0, N = 0 \\ \dfrac{1}{2}N - \dfrac{1}{4}(1 + (-1)^{N+1}), N > 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα της σχέσης (6) υπολογίζοντας μερικές από τις πρώτες τιμές της ακολουθίας:

$a_0 = 0$

$a_1 = \frac{1}{2}1 - \frac{1}{4}(1+(-1)^2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$

$a_2 = \frac{1}{2}2 - \frac{1}{4}(1+(-1)^3) = 1$

$a_3 = \frac{1}{2}3 - \frac{1}{4}(1+(-1)^4) = \frac{3}{2} - \frac{2}{4} = 1$

$a_4 = \frac{1}{2}4 - \frac{1}{4}(1+(-1)^5) = 2$, που όντως $a_4 = 2a_2 - a_0 = 2$

$a_5 = \frac{1}{2}5 - \frac{1}{4}(1+(-1)^6) = \frac{5}{2} - \frac{2}{4} = 2$, που όντως $a_5 = 2a_3 - a_1 = 2$